

б) Пусть на множествах из предыдущего пункта имеется структура кольца (ассоциативного, коммутативного с 1), а $a(\varphi_{i,j})$ — гомоморфизмы колец. Докажите, что на $\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} a(i)\right) / \sim$ есть естественная структура кольца (ассоциативного, коммутативного с 1) такая, что $\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} a(i)\right) / \sim$ — копредел в категории **CRing** по диаграмме $a : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{CRing}$.

Решение

Обозначим $S := \prod_i a(i) / \sim$, $\iota_i : a(i) \rightarrow S, t_i \mapsto [t_i]$. Также обозначим $\varphi_{i,j}^* := a(\varphi_{i,j})$

Определение операций

Определим операцию сложения на S следующим образом:

$$[t_i] + [t_j] := [\varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)], \quad [t_i], [t_j] \in S$$

Так как $\mathcal{I}$ — фильтрованная категория, такой k существует.

Проверим корректность. Пусть $t_i \in a(i), t_j \in a(j)$. Пусть также $t'_{i'} \in a(i'), t'_{j'} \in a(j')$ такие, что $t_i \sim t'_{i'}, t_j \sim t'_{j'}$.

$$u = \varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)$$

$$u' = \varphi_{i',k'}^*(t'_{i'}) + \varphi_{j',k'}^*(t'_{j'})$$

Найдём такой $p \in \mathcal{I}$, что образы u, u' в $a(p)$ совпадают.

Для $t_i, t'_{i'}$ выберем $l \in \mathcal{I}$:

$$\varphi_{i,l}^*(t_i) \underset{t_i \sim t'_{i'}}{=} \varphi_{i',l}^*(t'_{i'})$$

Для $t_j, t'_{j'}$ выберем $m \in \mathcal{I}$:

$$\varphi_{j,m}^*(t_j) \underset{t_j \sim t'_{j'}}{=} \varphi_{j',m}^*(t'_{j'})$$

По фильтрованности $\mathcal{I}$ существует индекс $p \in \mathcal{I}$ такой, что

$$p \leq k, \quad p \leq k', \quad p \leq l, \quad p \leq m$$

$$\varphi_{k,p}^*(u) = \varphi_{k,p}^*\left(\varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)\right) =$$

$$= \varphi_{k,p}^*\left(\varphi_{i,k}^*(t_i)\right) + \varphi_{k,p}^*\left(\varphi_{j,k}^*(t_j)\right)$$

$$\varphi_{k,p}^*(u) = \varphi_{i,p}^*(t_i) + \varphi_{j,p}^*(t_j)$$

Аналогично получаем

$$\varphi_{k',p}^*(u') = \varphi_{i',p}^*(t'_{i'}) + \varphi_{j',p}^*(t'_{j'})$$

$$\varphi_{i,p}^*(t_i) = \varphi_{l,p}^*\left(\varphi_{i,l}^*(t_i)\right) = \varphi_{l,p}^*\left(\varphi_{i',l}^*(t'_{i'})\right) = \varphi_{i',p}^*(t'_{i'})$$

Аналогично

$$\varphi_{j,p}^*(t_j) = \varphi_{j',p}^*(t'_{j'})$$

Получается, что

$$u \sim u' \Rightarrow [u] = [u']$$

Операция корректна

Нейтральным элементом является $[0]$, т.к. гомоморфизмы сохраняют 0. Обратным к $[t_i]$ является $[-t_i]$.

Проверим ассоциативность:

$$\begin{aligned} [t_i] + ([t_j] + [t_k]) &= \left| \begin{array}{c} j \quad k \\ \searrow \quad \swarrow \\ l \end{array} \right| = [t_i] + [\varphi_{j,l}^*(t_j) + \varphi_{k,l}^*(t_k)] = \\ &= \left| \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ m \end{array} \right| = [\varphi_{i,m}^*(t_i) + \varphi_{j,m}^*(t_j) + \varphi_{k,m}^*(t_k)] \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} ([t_i] + [t_j]) + [t_k] &= \left| \begin{array}{c} i \quad j \\ \searrow \quad \swarrow \\ m \end{array} \right| = [\varphi_{i,m}^*(t_i) + \varphi_{j,m}^*(t_j)] + [t_k] = \\ &= \left| \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ m \end{array} \right| = [\varphi_{i,m}^*(t_i) + \varphi_{j,m}^*(t_j) + \varphi_{k,m}^*(t_k)] \end{aligned}$$

Коммутативность следует из коммутативность колец.

Операцию умножения определим тем же образом:

$$[t_i] \cdot [t_j] = [\varphi_{i,k}^*(t_i) \cdot \varphi_{j,k}^*(t_j)]$$

Она корректна по тем же соображениям.

Нейтральным элементом является $[1]$, т.к. гомоморфизмы в **CRing** сохраняют единицу. Дистрибутивность следует также из свойств гомоморфизма.

Таким образом, на S есть структура коммутативного кольца с единицей.

Проверка коконуса

Пусть $t, t' \in a(i)$.

$$\iota_i(t + t') = [t + t']$$

$$\iota_i(t) + \iota_i(t') = [t] + [t'] = \left| \varphi_{i,i}^* = 1_{a(i)} \right| = [t + t']$$

$$\iota_i(t + t') = \iota_i(t) + \iota_i(t')$$

$$\iota_i(0_i) = [0] \quad \text{все нули эквивалентны}$$

$$\iota_i(t \cdot t') = [t \cdot t']$$

$$\iota_i(t) \cdot \iota_i(t') = [t] \cdot [t'] = \left| \varphi_{i,i} = 1_{a(i)} \right| = [t \cdot t']$$

$$\iota_i(t \cdot t') = \iota_i(t) \cdot \iota_i(t')$$

$$\iota_i(1_{a_i}) = [1] \quad \text{все единицы эквивалентны}$$

Тогда $\iota : a \Rightarrow S$ - коконус в **CRing**.

Универсальное свойство

Пусть $X \in \mathbf{CRing}$, $\mu : a \Rightarrow X$ — коконус. Хотим: единственный гомоморфизм $\theta : S \rightarrow X$.
Определим, как и раньше

$$\theta([t_i]) := \mu_i(t_i)$$

Проверим свойства гомоморфизма. Пусть $t_i \in a(i), t_j \in a(j)$:

$$\begin{aligned} \theta\left([\varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)]\right) &= \mu_k(\varphi_{i,k}^*(t_i)) + \mu_k(\varphi_{j,k}^*(t_j)) = \\ &\stackrel{\text{По свойствам коконуса}}{=} \mu_i(t_i) + \mu_j(t_j) = \theta([t_i]) + \theta([t_j]) \end{aligned}$$

Аналогично

$$\theta\left([\varphi_{i,k}^*(t_i) \cdot \varphi_{j,k}^*(t_j)]\right) = \mu_i(t_i) \cdot \mu_j(t_j) = \theta([t_i]) \cdot \theta([t_j])$$

Очевидно сохранение единицы:

$$\theta([1_i]) = \mu_i(1_i) = 1_X, \quad 1_i \in a(i)$$

Тогда $\theta : S \rightarrow X$ определена корректно.

$$\coprod_i a(i) / \sim = \operatorname{colim} a \text{ в } \mathbf{CRing}$$