

1.1 (Фильтрованные копределы в алгебраических категориях).

а) Пусть дана фильтрованная poset-категория $\mathcal{I}$ (т.е. для $i \geq j$ имеем стрелку $\varphi_{i,j} : i \rightarrow j$) и функтор $a : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Set}$. Определим на $\prod_{i \in I} a(i)$ следующее отношение эквивалентности:

$$a(i) \ni t_i \sim t_j \in a(j) \iff \exists k \in \mathcal{I}, i \geq k, j \geq k, \text{ т. ч. } a(\varphi_{i,k})(t_i) = a(\varphi_{j,k})(t_j)$$

Проверить, что это отношение эквивалентности и что $(\prod_{i \in I} a(i)) / \sim$ есть $\text{colim}_i a$.

Решение

Отношение эквивалентности

1. **Рефлексивность.** Для t_i можно выбрать $k = i$, т.к. $i \geq i$. Тогда

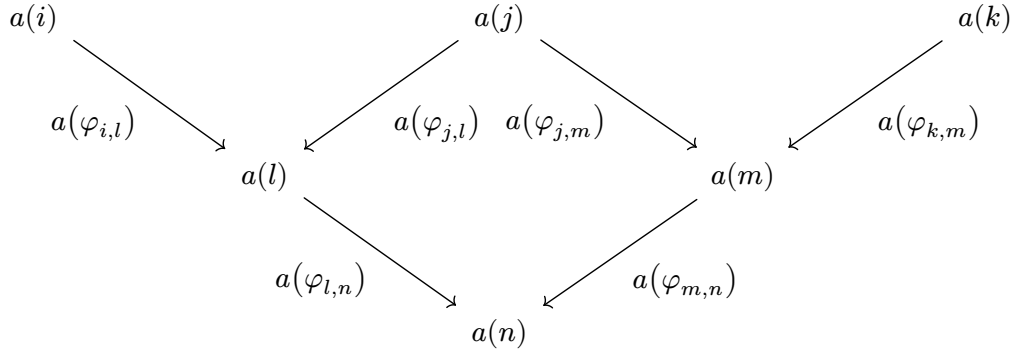
$$t_i \sim t_i$$

2. **Симметричность.** Если $t_i \sim t_j$, то существует такое $k \in \mathcal{I}$, что $i \geq k, j \geq k$ и $a(\varphi_{i,k})(t_i) = a(\varphi_{j,k})(t_j)$.

Если же $t_j \sim t_i$, то существует такое $l \in \mathcal{I}$, что $j \geq l, i \geq l$ и $a(\varphi_{j,l})(t_j) = a(\varphi_{i,l})(t_i)$. Положим $l = k$ — симметричность выполнена.

3. Пусть $t_i \sim t_j, t_j \sim t_k$, тогда существуют $l, m \in \mathcal{I}$ такие, что $i \geq l, j \geq l$ и $j \geq m, k \geq m$ и соответствующие образы равны.

Так как $\mathcal{I}$ — фильтрованная poset-категория, то существует $n \in \mathcal{I}$ такой, что $l \geq n, m \geq n$. Рассмотрим диаграмму



Имеем

$$a(\varphi_{i,l})(t_i) = a(\varphi_{j,l})(t_j)$$

Применяя $a(\varphi_{l,n})$, имеет

$$a(\varphi_{l,n} \circ \varphi_{i,l})(t_i) = a(\varphi_{l,n} \circ \varphi_{j,l})(t_j)$$

По свойствам poset-категории существуют единственные морфизмы $i \rightarrow n$ и $j \rightarrow n$:

$$a(\varphi_{i,n})(t_i) = a(\varphi_{j,n})(t_j)$$

Аналогично для $k \rightarrow n$. Тогда

$$a(\varphi_{i,n})(t_i) = a(\varphi_{j,n})(t_j) = a(\varphi_{k,n})(t_k)$$

Имеем

$$t_i \sim t_k$$

Копредел

Обозначим $S := \coprod_i a(i) / \sim$, $\iota_i : a(i) \twoheadrightarrow S, t_i \mapsto [t_i]$.

$$\begin{array}{ccc} a(i) & \xrightarrow{a(\varphi_{i,j})} & a(j) \\ & \searrow \iota_i \quad \swarrow \iota_j & \\ & S & \end{array}$$

Пусть $u := a(\varphi_{i,j})(t_i)$. Проверим

$$[u] \stackrel{?}{=} [t_i].$$

Эти два элемента эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $k \in \mathcal{I}$ такой, что $i \geq k, j \geq k$. Положим $k = j$. По определению $\varphi_{i,j}$ имеем $i \geq j$ и $j \geq j$ (отображение $a(\varphi_{j,j}) = 1_{a(j)}$), а по определению $u = a(\varphi_{i,j})(t_i)$. Получаем

$$u = a(\varphi_{i,j})(t_i) \Rightarrow u \sim t_i \Rightarrow [u] = [t_i]$$

Тогда

$$\iota_j \circ a(\varphi_{i,j}) = \iota_i$$

В таком случае, $\{\iota_i : a(i) \twoheadrightarrow S\}_{i \in \mathcal{I}}$ – коконус.

Пусть $X \in \mathbf{Set}$ и $\{\mu_i : a(i) \rightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ – коконус. Хотим: единственное $\theta : S \rightarrow X$ такое, что

$$\theta \circ \iota_i = \mu_i$$

$$\begin{array}{ccc} a(i) & \xrightarrow{a(\varphi_{i,j})} & a(j) \\ & \searrow \iota_i \quad \swarrow \iota_j & \\ & S & \\ & \downarrow \theta & \\ & X & \end{array}$$

μ_i (arc from $a(i)$ to X), μ_j (arc from $a(j)$ to X)

Положим $\theta([t_i]) := \mu_i(t_i)$. Проверим корректность.

Пусть $t_i \sim t_j \Rightarrow [t_i] = [t_j]$.

$$\mu_i(t_i) \stackrel{?}{=} \mu_j(t_j)$$

Существует $k \in \mathcal{I}$ такое, что $i \geq k, j \geq k$ и соответствующие образы равны. Тогда, так как μ – коконус, верно

$$\mu_k \circ a(\varphi_{i,k})(t_i) = \mu_i(t_i)$$

$$\mu_k \circ a(\varphi_{j,k})(t_j) = \mu_j(t_j)$$

Отсюда $\mu_i(t_i) = \mu_j(t_j)$.

Тогда

$$\coprod_i a(i) / \sim = \operatorname{colim}_i a$$

б) Пусть на множествах из предыдущего пункта имеется структура кольца (ассоциативного, коммутативного с 1), а $a(\varphi_{i,j})$ — гомоморфизмы колец. Докажите, что на $(\prod_{i \in \mathcal{I}} a(i))/\sim$ есть естественная структура кольца (ассоциативного, коммутативного с 1) такая, что $(\prod_{i \in \mathcal{I}} a(i))/\sim$ — копредел в категории **CRing** по диаграмме $a : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{CRing}$.

Решение

Обозначим $S := \prod_i a(i)/\sim$, $\iota_i : a(i) \rightarrow S, t_i \mapsto [t_i]$. Также обозначим $\varphi_{i,j}^* := a(\varphi_{i,j})$

Определение операций

Определим операцию сложения на S следующим образом:

$$[t_i] + [t_j] := [\varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)], \quad [t_i], [t_j] \in S$$

Так как $\mathcal{I}$ — фильтрованная категория, такой k существует.

Проверим корректность. Пусть $t_i \in a(i), t_j \in a(j)$. Пусть также $t'_{i'} \in a(i'), t'_{j'} \in a(j')$ такие, что $t_i \sim t'_{i'}, t_j \sim t'_{j'}$.

$$u = \varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)$$

$$u' = \varphi_{i',k'}^*(t'_{i'}) + \varphi_{j',k'}^*(t'_{j'})$$

Найдём такой $p \in \mathcal{I}$, что образы u, u' в $a(p)$ совпадают.

Для $t_i, t'_{i'}$ выберем $l \in \mathcal{I}$:

$$\varphi_{i,l}^*(t_i) \underset{t_i \sim t'_{i'}}{=} \varphi_{i',l}^*(t'_{i'})$$

Для $t_j, t'_{j'}$ выберем $m \in \mathcal{I}$:

$$\varphi_{j,m}^*(t_j) \underset{t_j \sim t'_{j'}}{=} \varphi_{j',m}^*(t'_{j'})$$

По фильтрованности $\mathcal{I}$ существует индекс $p \in \mathcal{I}$ такой, что

$$p \leq k, \quad p \leq k', \quad p \leq l, \quad p \leq m$$

$$\varphi_{k,p}^*(u) = \varphi_{k,p}^*\left(\varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)\right) =$$

$$= \varphi_{k,p}^*\left(\varphi_{i,k}^*(t_i)\right) + \varphi_{k,p}^*\left(\varphi_{j,k}^*(t_j)\right)$$

$$\varphi_{k,p}^*(u) = \varphi_{i,p}^*(t_i) + \varphi_{j,p}^*(t_j)$$

Аналогично получаем

$$\varphi_{k',p}^*(u') = \varphi_{i',p}^*(t'_{i'}) + \varphi_{j',p}^*(t'_{j'})$$

$$\varphi_{i,p}^*(t_i) = \varphi_{l,p}^*\left(\varphi_{i,l}^*(t_i)\right) = \varphi_{l,p}^*\left(\varphi_{i',l}^*(t'_{i'})\right) = \varphi_{i',p}^*(t'_{i'})$$

Аналогично

$$\varphi_{j,p}^*(t_j) = \varphi_{j',p}^*(t_{j'})$$

Получается, что

$$u \sim u' \Rightarrow [u] = [u']$$

Операция корректна

Нейтральным элементом является $[0]$, т.к. гомоморфизмы сохраняют 0. Обратным к $[t_i]$ является $[-t_i]$.

Проверим ассоциативность:

$$\begin{aligned} [t_i] + ([t_j] + [t_k]) &= \left| \begin{array}{c} j \quad k \\ \searrow \quad \swarrow \\ l \end{array} \right| = [t_i] + [\varphi_{j,l}^*(t_j) + \varphi_{k,l}^*(t_k)] = \\ &= \left| \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ m \end{array} \right| = [\varphi_{i,m}^*(t_i) + \varphi_{j,m}^*(t_j) + \varphi_{k,m}^*(t_k)] \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} ([t_i] + [t_j]) + [t_k] &= \left| \begin{array}{c} i \quad j \\ \searrow \quad \swarrow \\ m \end{array} \right| = [\varphi_{i,m}^*(t_i) + \varphi_{j,m}^*(t_j)] + [t_k] = \\ &= \left| \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ m \end{array} \right| = [\varphi_{i,m}^*(t_i) + \varphi_{j,m}^*(t_j) + \varphi_{k,m}^*(t_k)] \end{aligned}$$

Коммутативность следует из коммутативность колец.

Операцию умножения определим тем же образом:

$$[t_i] \cdot [t_j] = [\varphi_{i,k}^*(t_i) \cdot \varphi_{j,k}^*(t_j)]$$

Она корректна по тем же соображениям.

Нейтральным элементом является $[1]$, т.к. гомоморфизмы в **CRing** сохраняют единицу. Дистрибутивность следует также из свойств гомоморфизма.

Таким образом, на S есть структура коммутативного кольца с единицей.

Проверка коконуса

Пусть $t, t' \in a(i)$.

$$\iota_i(t + t') = [t + t']$$

$$\iota_i(t) + \iota_i(t') = [t] + [t'] = |\varphi_{i,i}^* = 1_{a(i)}| = [t + t']$$

$$\iota_i(t + t') = \iota_i(t) + \iota_i(t')$$

$$\iota_i(0_i) = [0] \quad \text{все нули эквивалентны}$$

$$\iota_i(t \cdot t') = [t \cdot t']$$

$$\iota_i(t) \cdot \iota_i(t') = [t] \cdot [t'] = \left| \varphi_{i,i} = 1_{a(i)} \right| = [t \cdot t']$$

$$\iota_i(t \cdot t') = \iota_i(t) \cdot \iota_i(t')$$

$$\iota_i(1_{a_i}) = [1] \quad \text{все единицы эквивалентны}$$

Тогда $\iota : a \Rightarrow S$ - коконус в **CRing**.

Универсальное свойство

Пусть $X \in \mathbf{CRing}$, $\mu : a \Rightarrow X$ — коконус. Хотим: единственный гомоморфизм $\theta : S \rightarrow X$.
Определим, как и раньше

$$\theta([t_i]) := \mu_i(t_i)$$

Проверим свойства гомоморфизма. Пусть $t_i \in a(i), t_j \in a(j)$:

$$\theta\left([\varphi_{i,k}^*(t_i) + \varphi_{j,k}^*(t_j)]\right) = \mu_k(\varphi_{i,k}^*(t_i)) + \mu_k(\varphi_{j,k}^*(t_j)) =$$

$$\stackrel{\text{По свойствам коконуса}}{=} \mu_i(t_i) + \mu_j(t_j) = \theta([t_i]) + \theta([t_j])$$

Аналогично

$$\theta\left([\varphi_{i,k}^*(t_i) \cdot \varphi_{j,k}^*(t_j)]\right) = \mu_i(t_i) \cdot \mu_j(t_j) = \theta([t_i]) \cdot \theta([t_j])$$

Очевидно сохранение единицы:

$$\theta([1_i]) = \mu_i(1_i) = 1_X, \quad 1_i \in a(i)$$

Тогда $\theta : S \rightarrow X$ определена корректно.

$$\coprod_i a(i) / \sim = \text{colim } a \text{ в } \mathbf{CRing}$$

1.2 (Прямой и обратный образ предпучка).

Определение предпучка

Пусть дано топологическое пространство X . Рассмотрим топологию на нём как poset и определим poset-категорию $\text{Open}(X)$. Тогда предпучок множеств на X есть функтор $\mathcal{F} : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Отображения $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ для $V \subset U$ называются отображениями ограничения. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ и предпучки $\mathcal{F}$ на X и $\mathcal{G}$ на Y .

а) Определим предпучок $f_*\mathcal{F}$ на Y как $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ для открытых $U \subset Y$. Отображения ограничения определим как $r_{U,V} := r_{f^{-1}(U), f^{-1}(V)}$. Убедитесь, что это предпучок. Этот предпучок называется **прямым образом предпучка $\mathcal{F}$** .

Решение

Будем обозначать $r_V^U := r_{U,V}$ — ограничения для $V \subseteq U$.

По непрерывности f , $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Тогда $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ определено корректно.

Если $V \subseteq U$, то $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$:

$$x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow f(x) \in U \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$$

Тогда отображения $r_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(U)}$ определены корректно.

$$f_*\mathcal{F} : \text{Open}(Y)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \text{ — предпучок}$$

б') Пусть даны категории $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{C}$. Пусть даны функторы $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}, \alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}, \beta : \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$. Определите естественные морфизмы $\text{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow \text{colim}(\alpha)$ и $\lim(\beta) \rightarrow \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ в предположении, что все пределы существуют. (Это будет на след. лекции, но попробуйте догадаться самостоятельно).

Решение

Для копределов

Обозначим $\iota : \alpha \Rightarrow \text{colim } \alpha, \tau : (\alpha \circ \varphi) \Rightarrow \text{colim}(\alpha \circ \varphi)$ — коконусы.

Хотим: коконус $\psi : (\alpha \circ \varphi) \Rightarrow \text{colim } \alpha$. Построим его с помощью переиндексации

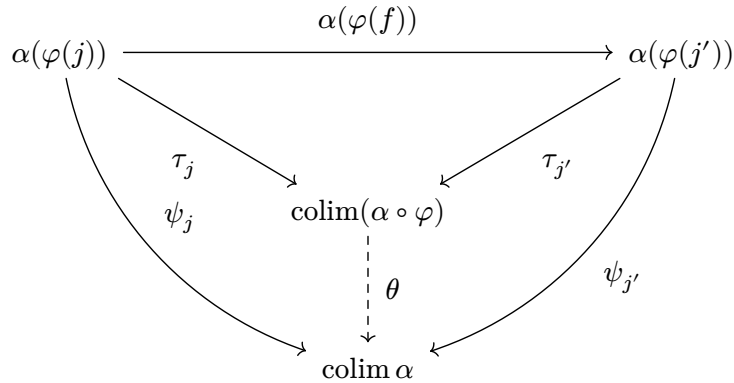
$$\psi_j := \iota_{\varphi(j)}$$

Очевидно, это коконус.

По универсальному свойству, $\forall X \in \mathcal{C}$ и коконуса $\mu : (\alpha \circ \varphi) \Rightarrow X$ существует единственное $\theta : \text{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow X$ т.ч

$$\theta \circ \tau_j = \mu_j$$

Положим $X = \text{colim } \alpha, \mu = \psi$.



Определили $\theta : \text{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow \text{colim } \alpha$

Для пределов

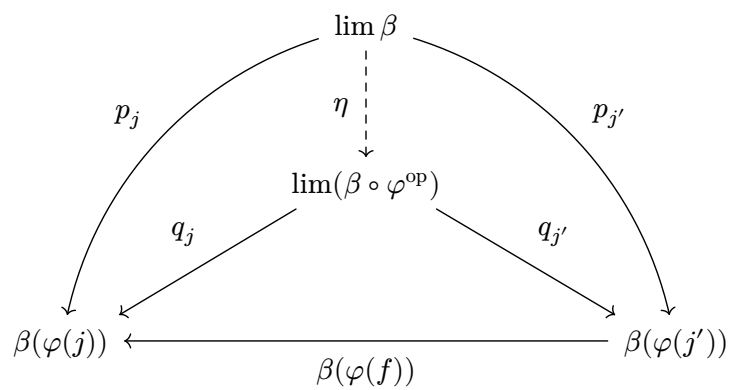
Имеем пределы с их каноническими конусами:

- $\pi : \lim \beta \Rightarrow \beta$ для функтора $\beta : \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$,
- $q : \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}}) \Rightarrow (\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ для функтора $\beta \circ \varphi^{\text{op}} : \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$.

Построим конус $p : \lim \beta \Rightarrow (\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ с помощью переиндексации:

$$p_j := \pi_{\varphi(j)}$$

Тогда по универсальному свойству предела $\lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ существует единственный морфизм $\eta : \lim \beta \rightarrow \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$, делающий диаграмму коммутативной:



Определили $\eta : \lim \beta \rightarrow \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$

б) Определим предпучок $f^+\mathcal{G}$ на X как $f^+\mathcal{G}(U) = \operatorname{colim}_{f(U) \subset W} \mathcal{G}(W)$, где копредел берётся по диаграмме, состоящей из множеств $\mathcal{G}(W)$, стрелки между которыми — отображения ограничения. Определите отображение ограничения для $f^+\mathcal{G}$ (используйте пункт б')). Этот предпучок называется **обратным образом предпучка $\mathcal{G}$** .

Пояснение: для любого $U \subset X$ определим полную poset-подкатегорию $C(U)$ в $\operatorname{Open}(Y)^{\operatorname{op}}$, состоящую из таких открытых $W \subset Y$, что $f(U) \subset W$. Тогда имеем функтор $\alpha(U, \mathcal{G}) : C(U) \rightarrow \mathbf{Set}$, который получается из функтора $\mathcal{G} : \operatorname{Open}(Y)^{\operatorname{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ограничением его на $C(U)$. Тогда $f^+\mathcal{G}(U)$ — это копредел по $\alpha(U, \mathcal{G})$ для открытого $U \subset X$.

Решение

Будем обозначать $\alpha_{\mathcal{G}}^U := \alpha(U, \mathcal{G})$.

Хотим привести это всё к виду $\operatorname{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow \operatorname{colim} \alpha$

Функтор вложения $\iota_U : C(U) \hookrightarrow \operatorname{Open}(Y)^{\operatorname{op}}$ просто оставляет объекты и морфизмы на месте. Тогда $\alpha_{\mathcal{G}}^U = \mathcal{G} \circ \iota_U$. В таком случае ограничения — это отображения

$$\operatorname{colim}(\mathcal{G} \circ \iota_U) \rightarrow \operatorname{colim}(\mathcal{G} \circ \iota_V), \quad V \subseteq U$$

Существует вложение категорий $\varphi_V^U : C(U) \hookrightarrow C(V)$.

$$\operatorname{Ob}(C(U)) = \{W \in \tau_Y \mid f(U) \subseteq W\}$$

$$\operatorname{Ob}(C(V)) = \{Z \in \tau_Y \mid f(V) \subseteq Z\}$$

Если $f(V) \subseteq f(U)$, а $f(U) \subseteq Z$ для $Z \in \operatorname{Ob}(C(U))$, то, очевидно, $f(V) \subseteq Z$. Тогда категории вложены.

Применим б'), подставляя

- $\mathcal{J} = C(U)$
- $\mathcal{I} = C(V)$
- $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$
- $\varphi = \varphi_V^U$
- $\alpha = \alpha_{\mathcal{G}}^V$

Тогда существует единственное

$$\operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^V \circ \varphi_V^U) \xrightarrow{\theta} \operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^V)$$

Это равно

$$\operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^U) \xrightarrow{\theta} \operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^V)$$

Ограничение определяется как

$$\theta : f^+\mathcal{G}(U) \rightarrow f^+\mathcal{G}(V)$$