

1.1 (Фильтрованные копределы в алгебраических категориях).

а) Пусть дана фильтрованная poset-категория $\mathcal{I}$ (т.е. для $i \geq j$ имеем стрелку $\varphi_{i,j} : i \rightarrow j$) и функтор $a : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Set}$. Определим на $\prod_{i \in \mathcal{I}} a(i)$ следующее отношение эквивалентности:

$$a(i) \ni t_i \sim t_j \in a(j) \iff \exists k \in \mathcal{I}, i \geq k, j \geq k, \text{ т. ч. } a(\varphi_{i,k})(t_i) = a(\varphi_{j,k})(t_j)$$

Проверить, что это отношение эквивалентности и что $(\prod_{i \in \mathcal{I}} a(i)) / \sim$ есть $\text{colim}_i a$.

Решение

Отношение эквивалентности

1. **Рефлексивность.** Для t_i можно выбрать $k = i$, т.к. $i \geq i$. Тогда

$$t_i \sim t_i$$

2. **Симметричность.** Если $t_i \sim t_j$, то существует такое $k \in \mathcal{I}$, что $i \geq k, j \geq k$ и $a(\varphi_{i,k})(t_i) = a(\varphi_{j,k})(t_j)$.

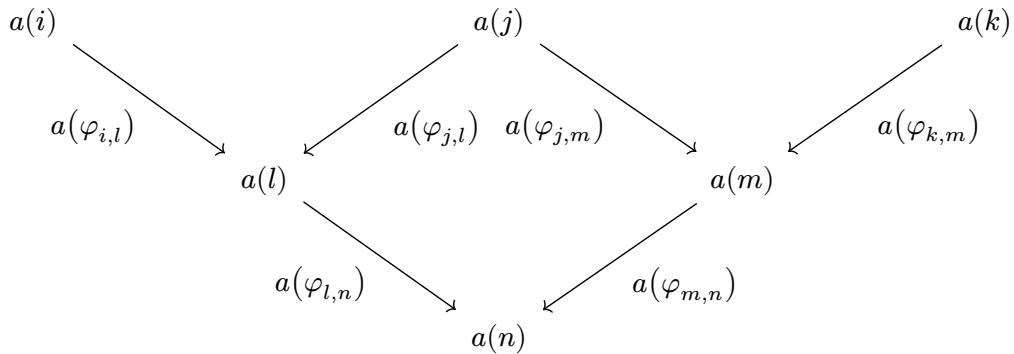
Если же $t_j \sim t_i$, то существует такое $l \in \mathcal{I}$, что $j \geq l, i \geq l$ и $a(\varphi_{j,l})(t_j) = a(\varphi_{i,l})(t_i)$.

Положим $l = k$ — симметричность выполнена.

3. Пусть $t_i \sim t_j, t_j \sim t_k$, тогда существуют $l, m \in \mathcal{I}$ такие, что $i \geq l, j \geq l$ и $j \geq m, k \geq m$ и соответствующие образы равны.

Так как $\mathcal{I}$ — фильтрованная poset-категория, то существует $n \in \mathcal{I}$ такой, что $l \geq n, m \geq n$.

Рассмотрим диаграмму



Имеем

$$a(\varphi_{i,l})(t_i) = a(\varphi_{j,l})(t_j)$$

Применяя $a(\varphi_{l,n})$, имеет

$$a(\varphi_{l,n} \circ \varphi_{i,l})(t_i) = a(\varphi_{l,n} \circ \varphi_{j,l})(t_j)$$

По свойствам poset-категории существует единственные морфизмы $i \rightarrow n$ и $j \rightarrow n$:

$$a(\varphi_{i,n})(t_i) = a(\varphi_{j,n})(t_j)$$

Аналогично для $k \rightarrow n$. Тогда

$$a(\varphi_{i,n})(t_i) = a(\varphi_{j,n})(t_j) = a(\varphi_{k,n})(t_k)$$

Имеем

$$t_i \sim t_k$$

Копредел

Обозначим $S := \coprod_i a(i) / \sim$, $\iota_i : a(i) \twoheadrightarrow S$, $t_i \mapsto [t_i]$.

$$\begin{array}{ccc} a(i) & \xrightarrow{a(\varphi_{i,j})} & a(j) \\ & \searrow \iota_i \quad \swarrow \iota_j & \\ & S & \end{array}$$

Пусть $u := a(\varphi_{i,j})(t_i)$. Проверим

$$[u] \stackrel{?}{=} [t_i].$$

Эти два элемента эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $k \in \mathcal{I}$ такой, что $i \geq k, j \geq k$. Положим $k = j$. По определению $\varphi_{i,j}$ имеем $i \geq j$ и $j \geq j$ (отображение $a(\varphi_{j,j}) = 1_{a(j)}$), а по определению $u = a(\varphi_{i,j})(t_i)$. Получаем

$$u = a(\varphi_{i,j})(t_i) \Rightarrow u \sim t_i \Rightarrow [u] = [t_i]$$

Тогда

$$\iota_j \circ a(\varphi_{i,j}) = \iota_i$$

В таком случае, $\{\iota_i : a(i) \twoheadrightarrow S\}_{i \in \mathcal{I}}$ – коконус.

Пусть $X \in \mathbf{Set}$ и $\{\mu_i : a(i) \rightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ – коконус. Хотим: единственное $\theta : S \rightarrow X$ такое, что

$$\theta \circ \iota_i = \mu_i$$

$$\begin{array}{ccc} a(i) & \xrightarrow{a(\varphi_{i,j})} & a(j) \\ & \searrow \iota_i \quad \swarrow \iota_j & \\ & S & \\ & \downarrow \theta & \\ & X & \end{array}$$

μ_i (arc from $a(i)$ to X), μ_j (arc from $a(j)$ to X)

Положим $\theta([t_i]) := \mu_i(t_i)$. Проверим корректность.

Пусть $t_i \sim t_j \Rightarrow [t_i] = [t_j]$.

$$\mu_i(t_i) \stackrel{?}{=} \mu_j(t_j)$$

Существует $k \in \mathcal{I}$ такое, что $i \geq k, j \geq k$ и соответствующие образы равны. Тогда, так как μ – коконус, верно

$$\mu_k \circ a(\varphi_{i,k})(t_i) = \mu_i(t_i)$$

$$\mu_k \circ a(\varphi_{j,k})(t_j) = \mu_j(t_j)$$

Отсюда $\mu_i(t_i) = \mu_j(t_j)$.

Тогда

$$\coprod_i a(i) / \sim = \operatorname{colim}_i a$$