

1.2 (Прямой и обратный образ предпучка).

Определение предпучка

Пусть дано топологическое пространство X . Рассмотрим топологию на нём как poset и определим poset-категорию $\text{Open}(X)$. Тогда предпучок множеств на X есть функтор $\mathcal{F} : \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Отображения $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ для $V \subset U$ называются отображениями ограничения. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ и предпучки $\mathcal{F}$ на X и $\mathcal{G}$ на Y .

а) Определим предпучок $f_*\mathcal{F}$ на Y как $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ для открытых $U \subset Y$. Отображения ограничения определим как $r_{U,V} := r_{f^{-1}(U), f^{-1}(V)}$. Убедитесь, что это предпучок. Этот предпучок называется **прямым образом предпучка $\mathcal{F}$** .

Решение

Будем обозначать $r_V^U := r_{U,V}$ — ограничения для $V \subseteq U$.

По непрерывности f , $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Тогда $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ определено корректно.

Если $V \subseteq U$, то $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$:

$$x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow f(x) \in U \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$$

Тогда отображения $r_{f^{-1}(U), f^{-1}(V)}^{f^{-1}(U)}$ определены корректно.

$$f_*\mathcal{F} : \text{Open}(Y)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \text{ — предпучок}$$