

б) Определим предпучок $f^+\mathcal{G}$ на X как $f^+\mathcal{G}(U) = \operatorname{colim}_{f(U) \subset W} \mathcal{G}(W)$, где копредел берётся по диаграмме, состоящей из множеств $\mathcal{G}(W)$, стрелки между которыми — отображения ограничения. Определите отображение ограничения для $f^+\mathcal{G}$ (используйте пункт б')). Этот предпучок называется **обратным образом предпучка $\mathcal{G}$** .

Пояснение: для любого $U \subset X$ определим полную poset-подкатегорию $C(U)$ в $\operatorname{Open}(Y)^{\operatorname{op}}$, состоящую из таких открытых $W \subset Y$, что $f(U) \subset W$. Тогда имеем функтор $\alpha(U, \mathcal{G}) : C(U) \rightarrow \mathbf{Set}$, который получается из функтора $\mathcal{G} : \operatorname{Open}(Y)^{\operatorname{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ограничением его на $C(U)$. Тогда $f^+\mathcal{G}(U)$ — это копредел по $\alpha(U, \mathcal{G})$ для открытого $U \subset X$.

Решение

Будем обозначать $\alpha_{\mathcal{G}}^U := \alpha(U, \mathcal{G})$.

Хотим привести это всё к виду $\operatorname{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow \operatorname{colim} \alpha$

Функтор вложения $\iota_U : C(U) \hookrightarrow \operatorname{Open}(Y)^{\operatorname{op}}$ просто оставляет объекты и морфизмы на месте. Тогда $\alpha_{\mathcal{G}}^U = \mathcal{G} \circ \iota_U$. В таком случае ограничения — это отображения

$$\operatorname{colim}(\mathcal{G} \circ \iota_U) \rightarrow \operatorname{colim}(\mathcal{G} \circ \iota_V), \quad V \subseteq U$$

Существует вложение категорий $\varphi_V^U : C(U) \hookrightarrow C(V)$.

$$\operatorname{Ob}(C(U)) = \{W \in \tau_Y \mid f(U) \subseteq W\}$$

$$\operatorname{Ob}(C(V)) = \{Z \in \tau_Y \mid f(V) \subseteq Z\}$$

Если $f(V) \subseteq f(U)$, а $f(U) \subseteq Z$ для $Z \in \operatorname{Ob}(C(U))$, то, очевидно, $f(V) \subseteq Z$. Тогда категории вложены.

Применим б'), подставляя

- $\mathcal{J} = C(U)$
- $\mathcal{I} = C(V)$
- $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$
- $\varphi = \varphi_V^U$
- $\alpha = \alpha_{\mathcal{G}}^V$

Тогда существует единственное

$$\operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^V \circ \varphi_V^U) \xrightarrow{\theta} \operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^V)$$

Это равно

$$\operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^U) \xrightarrow{\theta} \operatorname{colim}(\alpha_{\mathcal{G}}^V)$$

Ограничение определяется как

$$\theta : f^+\mathcal{G}(U) \rightarrow f^+\mathcal{G}(V)$$