

б') Пусть даны категории $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{C}$. Пусть даны функторы $\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}, \alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}, \beta : \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$. Определите естественные морфизмы $\text{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow \text{colim}(\alpha)$ и $\lim(\beta) \rightarrow \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ в предположении, что все пределы существуют. (Это будет на след. лекции, но попробуйте догадаться самостоятельно).

Решение

Для копределов

Обозначим $\iota : \alpha \Rightarrow \text{colim } \alpha, \tau : (\alpha \circ \varphi) \Rightarrow \text{colim}(\alpha \circ \varphi)$ – коконусы.

Хотим: коконус $\psi : (\alpha \circ \varphi) \Rightarrow \text{colim } \alpha$. Построим его с помощью переиндексации

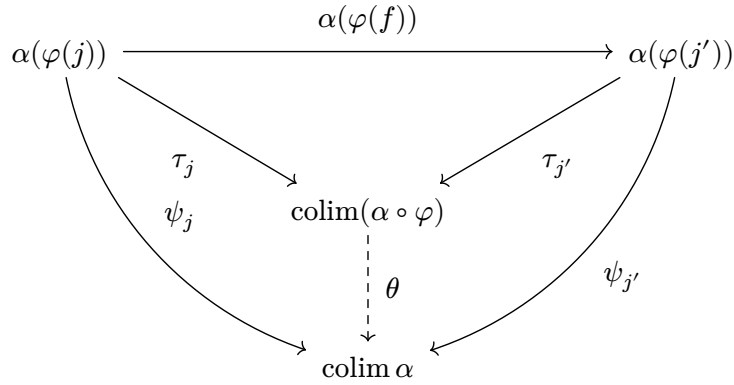
$$\psi_j := \iota_{\varphi(j)}$$

Очевидно, это коконус.

По универсальному свойству, $\forall X \in \mathcal{C}$ и коконуса $\mu : (\alpha \circ \varphi) \Rightarrow X$ существует единственное $\theta : \text{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow X$ т.ч

$$\theta \circ \tau_j = \mu_j$$

Положим $X = \text{colim } \alpha, \mu = \psi$.



Определили $\theta : \text{colim}(\alpha \circ \varphi) \rightarrow \text{colim } \alpha$

Для пределов

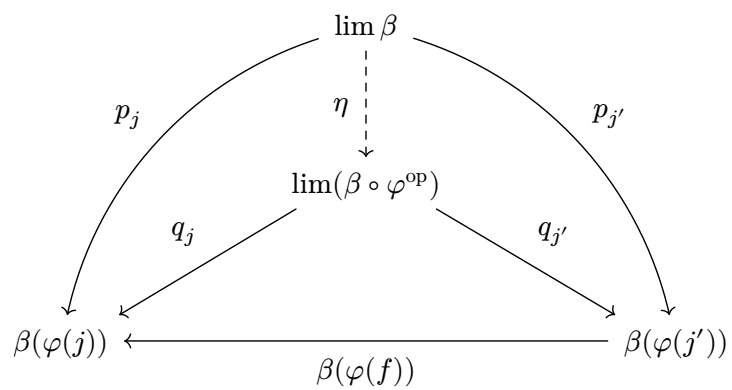
Имеем пределы с их каноническими конусами:

- $\pi : \lim \beta \Rightarrow \beta$ для функтора $\beta : \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$,
- $q : \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}}) \Rightarrow (\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ для функтора $\beta \circ \varphi^{\text{op}} : \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$.

Построим конус $p : \lim \beta \Rightarrow (\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ с помощью переиндексации:

$$p_j := \pi_{\varphi(j)}$$

Тогда по универсальному свойству предела $\lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$ существует единственный морфизм $\eta : \lim \beta \rightarrow \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$, делающий диаграмму коммутативной:



Определили $\eta : \lim \beta \rightarrow \lim(\beta \circ \varphi^{\text{op}})$